Obliczanie całek.

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się ze sposobami i możliwościami przybliżonego obliczania całek w środowisku GNU octave.

Wprowadzenie

Kwadratury

Zajmijmy się przybliżonym obliczeniem całki postaci:

$$\int_a^b f(t)dt$$

dla funkcji f, czy ogólniej:

$$\int_a^b f(t)\rho(t)dt$$

gdzie ρ jest daną wagą.

Do obliczania przybliżonego całek jednowymiarowych tzn. typu

$$c = \int_a^b f(t)dt$$

służy funkcja octave'a: `quad`. Jej najprostsze wywołanie to:

```
>> c=quad(FCN,a,b,D,S),
```

gdzie a, b to początek i koniec odcinka, D (dokładność względna) - dokładność obliczenia całki, wartość domyślna to 10^{-3} (parametr opcjonalny), S (opcja śledzenia) - wektor zawierający miejsca osobliwe całki (parametr opcjonalny), a FCN to wskaźnik do funkcji octave'a postaci:

```
>> function y=f(x)
      #komendy octave'a
      y=.......;
endfunction
```

Jeśli funkcja, której całkę chcemy obliczyć jest już wcześniej zdefiniowana, to uchwyt do niej zwraca operator octave'a `@` , np. uchwyt do funkcji sin zwróci komenda : `@sin`.

Na początku wypróbujmy kilka prostych całek, które sami potrafimy obliczyć analitycznie:

- $\int_{-1}^{1} \sin(x)\, dx$ (oczekiwany wynik: 0)

```
>> quad(@sin,-1,1)
```

- $\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$ (oczekiwany wynik: 2)

```
>> quad(@sin,0,pi)
```

- $\int_0^1 \sqrt{t}\, dt$ (oczekiwany wynik: $\frac{2}{3}$)

```
>> c=quad(@sqrt,0,1)
```

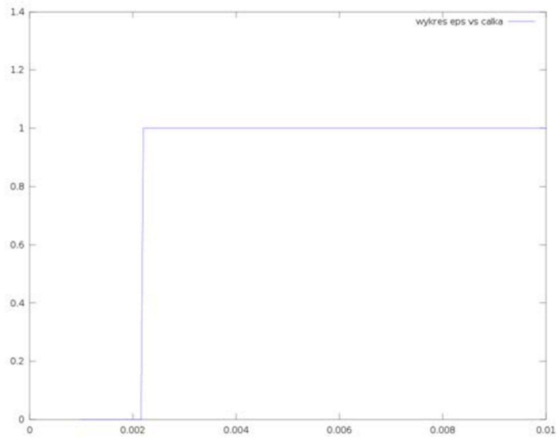
W celu sprawdzenia wykonajmy następujące działanie:

```
>> c-2/3
ans=2.2204e-016
```

otrzymany wynik to nic innego jak zero na poziomie błędu zaokrągleń.
Czy funkcja `quad()` daje zawsze dobre wyniki? Rozpatrzmy prosty przykład całki z funkcji z parametrem: $\int_a (t) = a^{-1} f1(\frac{t}{a})$ w przedziale $[-1,1]$ (wykres funkcji przedstawiono na Rys.1)

$$f1(t) = \begin{cases} 1-|t| & x \in (-1,1) \\ 0 & \end{cases}$$

w przeciwnym wypadku całka powinna być zawsze równa jeden.



Rys. 1. Wykres funkcji f1(t).

Zdefiniujmy najpierw funkcję $f1$:

```
>> function y-f1(x)
      y=1-abs(x);
      y=y.*(y>0);
endfunction
c=quad(@f1,-1,1)
```

Otrzymaliśmy jeden. Powtórzmy obliczenia dla $a = 10^{-k}$ gdzie $k = 1,3,5,7, \ldots M$

```
>> M=6;
>> c=a=zeros(M+1,1);
>>a(1)=1;
for k=M:1,
      c(k)=quad(@(x)a(k)*f1(a(k)*x),-1,1);
      a(k+1)=a(k)*10;
```

```
endfor
```
Od pewnego momentu obliczone przybliżenia całek są równe zero zamiast jeden. Wychwyćmy ten moment dokładniej. Powtórzmy obliczenia dla $a \in [1e-3,1e-2]$.
```
>> a=linspace(100,1000,300);
>> M=length(a);
>> c=zeros(M,1);
>> for k=1:M,
      c(k)=quad(@(x)a(k)*f1(a(k)*x),-1,1);
endfor
>> plot(a,c)
```

Jest to dość gwałtowna zmiana.

Dlaczego tak się dzieje? Funkcja octave'a `quad()` może obliczyć przybliżenie całki korzystając z co najwyżej skończonej ilości wartości funkcji na odcinku całkowania. Nośnik funkcji f_a jest bardzo mały dla wartości $a \approx 1e-3$ względem odcinka całkowania $[-1,1]$, stąd być może wszystkie obliczone wartości były równe zero. Można się domyśleć, że funkcje octave'a działają na zasadzie czarnej skrzynki: podajemy parametry do funkcji, a dana funkcja, w tym przypadku `quad()` powinna zwrócić przybliżenie całki.
Spróbujmy obliczyć tę całkę dzieląc odcinek $[-1,1]$ na małe pododcinki i całkując po nich tzn.

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_k+h} f(t)dt \qquad h = \frac{b-a}{N}; \quad x_k = a + k \cdot h$$

a każdą całkę $\int_{x_k}^{x_k+h} f(t)dt$ możemy obliczyć przy pomocy funkcji octave'a `quad()`.

```
>> a=1000;
>> N=100;
>> h=2/N;
>> xk=-1;
>> g=@(x)a*f1(a*x);
>> c=0;
>> for k=0:(N-1),
      c+=quad(g,xk,xk+h);
      xk+=h;
endfor
>> abs(c-1)
```

Otrzymaliśmy błąd $abs(c-1)$ równy `ans=6.8505e-12`, podczas gdy `abs(quad(g,-1,1)-1)` zwraca błąd równy jeden. Oczywiści znając nośnik funkcji możemy policzyć całkę po jej nośniku. Otrzymamy:

```
>> a=1000;
>> g=@(x)a*f1(a*x);
>> c=quad(q,-1e-3.1e-3)
>> abs(c-1)
```

Błąd jest równy `ans=1.1102e-16`, czyli jest na poziomie błędu zaokrągleń. Również dla funkcji o dużej zmienności, np. silnie oscylujących, funkcja octave'a `quad()` może zwrócić zły wynik.
Spróbujmy scałkować np. $\sin(999 \cdot x)$ na odcinku $[0, \pi]$ i porównajmy z dokładnym wynikiem $\int_0^\pi \sin(999 \cdot x)\, dt = 1e - 3 \cdot (1 - \cos(999 \cdot \pi))$.

```
>> a=999;
>> g=@(x)sin(a*x);
>> c=quad(g,0,pi)
>> abs(c-(1/a)*(1-cos(a*pi)))
```

Tu funkcja quad() wydrukowała na ekranie ostrzeżenie:

```
ABNORMAL RETURN FROM DQAGP
```

Warto wspomnieć, że funkcja `quad()` oblicza również całki po odcinkach nieograniczonych. Za wartości a, b w wywołaniu `quad(f,a,b)` możemy przyjąć `inf` lub odpowiednio `-inf`, np. możemy scałkować funkcję $\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$ po całej prostej rzeczywistej, czy jakiejś półprostej:

```
>> g=@(x)exp(-0.5*x*x);
>> c1=quad(g,-inf,0)
>> c2=quad(g,0,inf)
>> c3=quad(g,-inf,inf)
>> c3-c1-c2
```

Kwadratury złożone

Oczywiście w octave'ie możemy zaimplementować najprostsze kwadratury złożone, np. najprostszą kwadraturę złożoną:

$$\int_a^b f(t)dt\, P_N(f) \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^{N} f(a + k \cdot h)$$

```
Implementacja w octave'ie tej kwadratury to:
>> function c=prostakw(f,a,b,N=300)
#kwadratura prostokątów prawostronna
#Input: a,b, końce przedziału całkowania
#N - ilość puntow - domyślnie 100
#f - wskaznik do funkcji - zwracajacej wektor wartosci dla wektora ddanych
#Output: c - przybliżenie całki
>> h=(b-a)/N;
>> x=(1:N)*h;
>> y=f(x);
>> c=h*sum(y);
>> endfunction
```

Przetestujmy tę kwadraturę. Na początku na jednomianach:

```
>> prostakw(@(x) x,0,1)-0.5
>> prostakw(@(x) x.*x,0,1)-1/3
```

Wynik jest poprawny. Jeżeli zwiększymy N, to być może uzyskamy lepszy wynik:

```
prostakw(@(x) x,0,1,1000)-0.5
prostakw(@(x) x.*x,0,1,1000)-1/3
```

Błąd jest na poziomie 10^{-4}.
Dla funkcji klasy $C^1([a,b])$ błąd można oszacować przez

$$|\int_a^b f(t)\ dt - \ P_N f| \leq ||f'||_{\infty,[a,b]} h = O(N^{-1}),$$

przy czym dla funkcji $f(x) = x$ w tym oszacowaniu widzimy równość. Można pokazać, że dla dostatecznie gładkiej funkcji zachodzi:

$$\int_a^b f(t)\, dt - P_N f = -f'(\xi) h$$

dla pewnego punktu $\xi \in (a,b)$, a dla bardziej regularnych funkcji

$$\int_a^b f(t)\, dt - P_N f = Ch + O(h^2)$$

dla pewnej ujemnej stałej C.

N	h	E_N	$E_N/E_{N/2}$
10	1.00e-01	5.17e-02	0.00000
20	5.00e-02	2.54e-02	2.03279
40	2.50e-02	1.26e-02	2.01653
80	1.25e-02	6.28e-03	2.00830
160	6.25e-03	3.13e-03	2.00416
320	3.13e-03	1.56e-03	2.00208
640	1.56e-03	7.82e-04	2.00104
1280	7.81e-04	3.91e-04	2.00052

Badanie rzędu kwadratury $P_N f$ dla całki z funkcji $F(x) = x^2$ w przedziale [0,1]. Błąd $E_N = |\int_0^1 f - P_N f|$.
Przetestujmy teraz tę kwadraturę dla ustalonej analitycznej funkcji f i podwajanych wartości N, tzn. obliczymy $P_N f$ dla $N = N_0, 2 * N_0, \ldots$ i następnie policzymy:

$$\frac{E_k}{E_{k+1}} = \frac{C*h+O(h^2)}{C*\frac{h}{2}+O(h^2)} \approx 2,$$

dla $E_k = |\int_a^b f(t)\, dt - P_{2^k N_0} f|$.

N	h	E_N	$E_N/E_{N/2}$
10	3.14e-01	1.65e-02	
20	1.57e-01	4.11e-03	4.00495
40	7.85e-02	1.03e-03	4.00123
80	3.93e-02	2.57e-04	4.00031
160	1.96e-02	6.43e-05	4.00008
320	9.82e-03	1.61e-05	4.00002
640	4.91e-03	4.02e-06	4.00000
1280	2.45e-03	1.00e-06	4.00000

Badanie rzędu kwadratury $P_N f$ dla całki z funkcji $f(x) = \sin(x)$ w przedziale $[0, \pi]$. Błąd $E_N = |\int_0^\pi f - P_N f|$.

```
>> N=10; M=8;
>> #c=2; # znana wartość całki
>> e=0;
>> for k=1:M,
      kw=prostakw(f,a,b,N);
      ep=e;
      e=abs(c-kw);
      printf("[%] e=%g ep/e=%6.5f \n,N,e,ep/e);
      N*=2;
endfor
```

N	h	E_N	$E_N/E_{N/2}$
10	1.00e-01	4.17e-02	
20	5.00e-02	2.09e-02	1.99085
40	2.50e-02	1.05e-02	1.99544
80	1.25e-02	5.25e-03	1.99772
160	6.25e-03	2.63e-03	1.99886
320	3.13e-03	1.31e-03	1.99943
640	1.56e-03	6.57e-04	1.99972
1280	7.81e-04	3.29e-04	1.99986

Zadania

1. Uruchomić program GNU octave.
2. Uruchomić program Word (lub inny edytor tekstu).
3. Obliczyć całki:

   a) $\int_0^1 \sin(3x)\, dx$

   b) $\int_0^\infty \exp(-x^2)\, dx$

   c) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$

4. Napisz skrypt, który oblicza wartość całki oznaczonej $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+1}$.(Porównaj otrzymane wyniki z wartością dokładną $\pi/2$.)

   a) Metodą prostokątów.

Przybliżoną wartość całki na przedziale domkniętym $[a, b]$, podzielonym na n przedziałów o długości $h = \frac{b-a}{n}$ każdy, oblicza się stosując wzór: $I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih)$. Wykonaj obliczenia dla $n = 10$, $n = 20$ i $n = 40$. Dla powyższego zadania przyjmij: $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

   b) Metodą trapezów.

Przybliżoną wartość całki na przedziale domkniętym $[a, b]$, podzielonym na n podprzedziałów o długościach $h = \frac{b-a}{n}$ każdy, oblicza się stosując wzór: $I \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=2}^{n-1} f(a + ih) + f(b)\right)$. Wykonaj obliczenia dla $n = 10$, $n = 20$ i $n = 40$. Dla powyższego zadania przyjmij: $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.